Problém pyramid

Historická poznámka:

Největší z egyptských pyramid byla vybudována faraónem Cheopsem (Khufu), který žil ve 4. dynastii, asi 2500 l. př. n. l. Cheopsova pyramida má monumentální rozměry - původní výška 147 m, délka hrany 233 m. Tato obrovská masa kamene musela být přemisťována pomocí možností středověkého Egypta - neznali kolo, jeřáb ani kladkostroj. Jak pohybovali kamennými bloky? Hlavní část kamene pocházela z lomu vzdáleného asi 400 m jižně od pyramidy. Na vnější plášť pyramidy byl užit vápenec z protilehlého břehu Nilu. Na obklady hrobky a uzavření vnitřních chodeb byl použit mramor z 935 km vzdáleného Asuanu. Dnešní výzkumy ukazují, že kameny byly nakládány na dřevěné sáně a tyto saně byly vlečeny pomocí lan zástupy dělníků. Otázkou je, jak se kameny dostaly na své konečné místo. Předpokládá se, že byly vezeny na dřevěných saních po rampách. Jak rampa vypadala lze jen spekulovat. Doposud nebyla tato obrovská stavba se svou technickou přesností překonána. Herodot v roce 450 př. n. l. předpokládal, že na stavbě pracovalo 100 000 dělníků. Představuje si Cheopse jako tyrana, který využívá otrocké práce. Ve 20. století se ozývaly hlasy, že to může být jen dílo mimozemšťanů. Výzkumy ukazují, že práce na stavbě pyramidy byly prováděny každý rok během 4 měsíců záplav na Nilu, kdy ostatní zemědělské práce musely být zastaveny.

Formulace problému:

Úkolem je odhadnout počet dělníků, kteří se podíleli na stavbě. Ptáme se, kolik bylo třeba dělníků na transport kamene z lomu na jejich konečné místo stavby.

Řešení:

Vyčleníme tyto kroky postupu:

- Kolik kamenných bloků muselo být denně dopraveno z lomu?
- Kolik lidí bylo potřeba pro jedny sáně?
- Jak rychle mohly být sáně taženy?
- Kolik sání muselo být současně na cestě?
- Kolik dělníků bylo potřeba na rampě?

Kamenné bloky:

Ptejme se nejdříve, kolik kamenných bloků bylo zabudováno do Cheopsovy pyramidy. S výškou 147 m a délkou hrany 233 m je její objem $V = \frac{l^2 h}{3} = 2{,}65.10^6$ m^3. Jeden kamenný blok má objem asi 1 m^3. To znamená, že pyramida se skládá z asi 2,65 milionů kamenných bloků, ktré musely být přepraveny na místo stavby. Faraón Cheops vládl 23 let a proto musíme vycházet z toho, že pyramida musela být postavena během 20 let. Delší doba stavby je málo pravděpodobná, protože nedostavěné pyramidy byly v případě smrti faraóna jen zřídkakdy dostavěny. Kolik kamenných bloků museli sáně denně přepravit? Předpokládáme-li dobu stavby 4 měsíce ročně, pak bez odpočinkových dnů se mohlo stavět 120 dnů ročně. Za 20 let je to 2 400 dní. Za tuto dobu se musely přepravit všechny kamenné bloky. Vydělíme-li počet bloků počtem dní, dostaneme první výsledek. Denně muselo být přepraveno 1 000 kamenných bloků. Předpokládáme-li, že délka pracovního dne byla 12 hodin, pak muselo být každou hodinu přepraveno 80 kamenných bloků, což bylo s dostatečným množstvím pracovníků možné.

Saně:

Nyní zkusíme určit, kolik dělníků muselo být u každých saní. Jejich počet je dán fyzikálními zákony. Omezíme se nejprve na cestu z lomu k rampě, tedy na rovinu. Největší sílu je třeba vynaložit na počátku pohybu, když se saně musí uvést do pohybu. Když bude sáně táhnout málo dělníků, nebude překonána třecí síla a sáně se nepohnou. Maximální třecí síla je

$$F_{t\,\max} = \mu m g \,,$$

kde μ je součinitel tření, m hmotnost a g gravitační zrychlení. V tabulkách lze zjistit, že průměrná hustota kamene je asi 2 500 $\mathrm{kgm^{-3}}$. Při objemu 1 $\mathrm{m^3}$ má kamenný blok hmotnost M asi 2 500 kg. Koeficient tření se odhaduje hůře, neboť v tabulkách jsou hodnoty koeficientu tření dřeva o dřevo 0,5 a koeficientu tření dřeva o kámen 0,7. Lze předpokládat, že Egypťané natírali podklad saní bahnem a vodou, aby snížili koeficient tření. Můžeme tedy odhadnout, že koeficient tření byl asi 0,3. Potom můžeme odhadnout maximální třecí sílu, která musela být překonána, aby sáně byly uvedeny do pohybu $F_{t\,\max} =$ 7 350 N. Nyní musíme zjistit, jakou silou mohl táhnout jeden dělník. Neboť dospělý člověk může bez větší námahy zvednout 25 kg pytel brambor, je k tomu potřeba síly 250 N. Přisoudíme-li tuto sílu Egypťanovi, pak zjistíme, že jedny sáně muselo táhnout asi 30 dělníků.

Rychlost sání:

Víme, že sáně táhlo 30 dělníků, ale jak rychle mohli postupovat? I to lze zjistit na základě fyzikálních úvah. Při konstantní rychlosti je třeba táhnout silou $F_T = \mu_T mg$, kde μ_T je součinitel smykového tření a předpokládáme, že má hodnotu 0,2. Při táhnutí vynakládáme práci $W = F_T s$ a pak výkon je $P = \frac{W}{t} = F_T v$. Víme třeba z ergometru na kole, že člověk může bez únavy podávat konstantní výkon 100 W. Takže 30 dělníků táhnoucích sáně může trvale podávat výkon 3000 W, který lze využívat pro tažení saní. Odtud lze určit rychlost

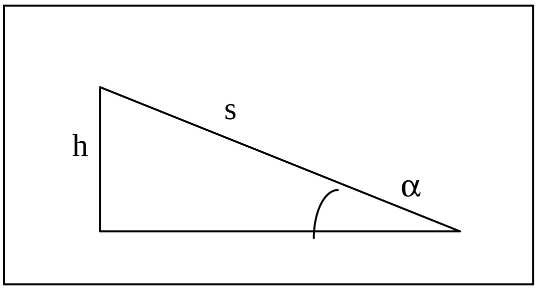
$$v = \frac{P}{F_T} = \frac{P}{\mu_T mg}.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty, vypočítáme rychlost postupu saní, která je 2 kmh^{-1}. Tato hodnota vychází z idealizovaných předpokladů. Vlivem nerovností a nerovnoměrným táhnutím bude skutečná rychlost menší. Dále budeme vycházet z toho, že rychlost je 1 kmh^{-1}.

Počet týmů táhnoucích sáně:

Při rychlosti 1 kmh^{-1} potřebovaly sáně k ujetí dráhy 400 m od lomu k základům pyramidy dobu $t = \frac{s}{v} = 24$ minut. K tomu je třeba přidat dobu potřebnou na cestu zpět a na naložení kamenných bloků na sáně. Potom je potřeba počítat s dobou 1 hodiny pro přepravu pro jeden tým. Vyjdeme-li z délky doby efektivní práce 10 hodin denně, může jeden tým denně dopravit asi 10 kamenných bloků. Denně je však potřeba přepravit 1 000 kamenných bloků, takže celkem musí pracovat 100 týmů táhnoucích sáně po 30 dělnících. Pro táhnutí sání mezi lomem a základnou pyramidy bylo potřeba asi 3 000 dělníků.

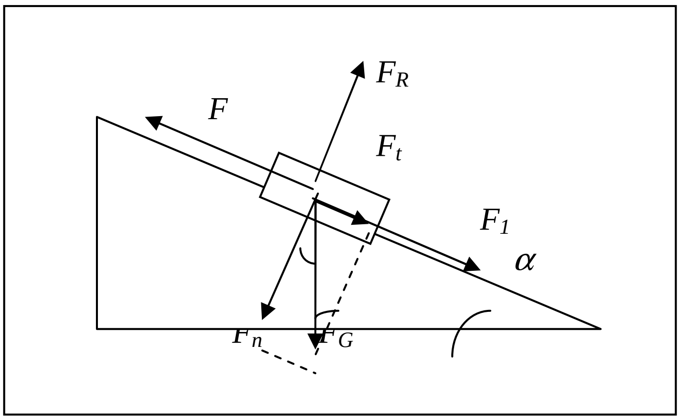
Na rampě:



Obr. 2 – Nakloněná rovina

Rovná rampa je jen málo pravděpodobná, jelikož to byla obrovská stavba. Nejspíše to byly spirály různých typů. Z fyzikálního hlediska je důležitý jen úhel sklonu, který je dán tak, aby tažení bylo pohodlné, to je asi 20°. Během stavby se rampa prodlužovala, což byla komplikace. Vyjdeme-li z toho, že blok musel být dopraven do výšky těžiště pyramidy ležící v $\frac{1}{4}$ její výšky h = 37 m, je dráha dána vztahem

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = 107\ \text{m}.$$



Obr. 3 – Síly působící na sáně na rampě

Nyní využijeme fyzikálních poznatků při pohybu na nakloněné rovině. Dělníci museli táhnout saně s kamenným blokem silou F, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou – rampou. Proti pohybu saní směřuje třecí síla F_t, jejíž velikost je přímo úměrná velikosti kolmé tlakové síly $F_t = \mu F_n$. Dále na sáně působí tíhová síla F_G, kterou rozložíme na dvě navzájem kolmé složky F_1 a F_n. Pohybový účinek síly F_n se ruší reakcí rampy na saně $F_R = - F_n$. Při posouvání saní po rampě rovnoměrným pohybem je výslednice sil působících na saně nulová. Velikost síly F je tedy rovna součtu velikostí sil F_1 a F_t. Podle obr. 3 je $F_1 = F_G \sin\alpha$ a $F_t = \mu F_G \cos\alpha$. Po dosazení $F_G = mg$ dostáváme vztah

$$F = mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Dosadíme číselné hodnoty a vypočítáme sílu F = 15300 N, což je dvakrát tolik co na rovině. Vyjdeme-li opět z předpokladu, že každý dělník může táhnout sílou 250 N, zjistíme, že k táhnutí sání bylo potřeba 60 dělníků. Rychlost na rampě vypočteme $v = \frac{P}{F}$, kde P = 60 . 100 = 6 000 W. Po dosazení dostaneme

$$v = \frac{P}{mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} = 1{,}6 \text{ km.h}^{-1}.$$

Opět jde o ideální hodnotu, takže skutečná rychlost je asi 0,8 km.h^{-1}. Doba saní na rampě je rovna 8 minutám. Spolu s vyložením a cestou zpět lze tedy počítat s 20 minutami, které stráví jedny sáně na rampě. Tedy za jednu hodinu může jeden tým přemístit na rampě 3 kamenné bloky. Při 10 hodinové pracovní době je to 30 bloků za den. Protože potřebujeme denně přemístit 1 000 bloků, musí tedy pracovat 33 sání po 60 dělnících. Na rampě bylo potřeba 2 000 dělníků. Tolik se jich však na 100 metrů dlouhou rampu vejde jen stěží, proto muselo být použito více ramp nebo plošší rampy.

<u>Výsledek:</u>

Celkem na přepravě kamenných bloků z lomu na jejich konečné místo bylo použito 5 000 dělníků, nepočítali jsme s volnem, nemocí, opilostí ani mumifikací příbuzných, takže je třeba zapojit 10 000 dělníků. Další lidé pracovali v lomu při nakládce a vykládce, umísťování bloků, zásobování, přípravě nástrojů. Jejich počet byl asi 20 až 30 tisíc. Toto je zajímavý výsledek našeho odhadu.

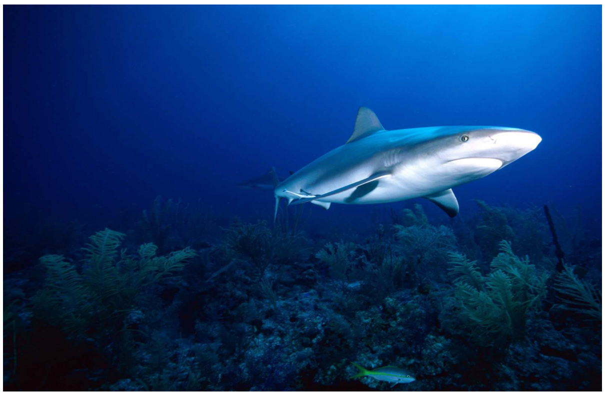
Organizace práce takového velkého počtu lidí nebyla ve starověku problémem, což dokazují i dávné bitvy, kterých se účastnilo 20 000 až 100 000 vojáků.

Tento Fermiho problém pyramid je vhodný zejména při opakovaní oboru mechanika. Při řešení tohoto problému si žáci zopakují následující témata – pohyb s konstantní rychlostí, smyková a valivé tření, výkon a nakloněná rovina.

Problém žravosti žraloka

Formulace problému:

Ptáme se, kolik ryb musí denně sežrat žralok.



Řešení:

Žraloci jsou považování všeobecně za žravé a brutální zabijáky, kteří sežerou vše, co je tak hloupé a zkříží jim cestu. Vzpomeňme si na filmy, ve kterých žraloci sežrali bezbranné plavce jako jednohubky. Naskýtá se tedy zajímavá otázka, kolik toho vlastně žralok denně sežere, kterou málokdo dokáže zodpovědět. Odhady jsou různé - od jednoho kilogramů až po několik tun za den.

Výchozím bodem pro řešení problému je fyziologická zvláštnost žraloků. Aby mohl žralok vůbec dýchat, musí se stále pohybovat. Bude zásobován kyslíkem pouze tehdy, pokud se dostane dostatečné množství vody díky jeho pohybu k žábrám. Musí dokonce plavat i ve spánku. Z vlastní zkušenosti víme, že plavání je namáhavá činnost. Při neustálém plavání musí žralok konat práci při překonávání odporu vody. Zde se nabízí vysvětlení, že toto je příčina jeho značné chuti k jídlu. Jsou tedy žraloci tak žraví, protože se musí stále pohybovat?

K takto formulovanému problému již můžeme přistupovat fyzikálně. Předpokládejme, že plavání je hlavní činností žraloka, při níž spotřebovává většinu energie. Pak můžeme vypočítat práci, kterou během dne vykoná při překonávání odporu vody a z této hodnoty určíme potřebné množství potravy.

Před dalšími výpočty je třeba si vyjasnit ještě jeden bod. Teplo odevzdané do okolní vody žralokem není při této bilanci potřeba uvažovat. Žraloci jsou chladnokrevní a nemusí si udržovat tělesnou teplotu na určité hodnotě. Žralok odevzdá do vody teplo vzniklé neschopností svalů zcela přeměnit chemickou energii (skrytou v potravě) na mechanickou. Toto zohledníme užitím koeficientu účinnosti menšího než 1.

Pro konkrétní výpočet zvolme např. žraloka modrého, jehož délka je 3 - 4 m a průměr 50 cm. Jeho průměrná rychlost je asi 0,5 ms^{-1}. Žralok modrý patří mezi rychlé plavce. Nejdelší pozorovaná vzdálenost, kterou žralok za den urazí, je asi 55 km.

Očekávali bychom, že žralok pohybující se ve vodě způsobuje turbulentní proudění. Odporová síla je v tomto případě dána vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C\rho S v^2 \ (*),$$

kde C je součinitel odporu (stanovuje se empiricky), ρ hustota prostředí, S obsah příčného průřezu obtékaného objektu a v je velikost relativní rychlosti mezi objektem a vodou. Turbulentní proudění se ověří pomocí Reynoldsova čísla

$$\mathrm{Re} = \frac{l\rho v}{\eta} \ ,$$

kde l je délka objektu (žraloka), v rychlost, ρ hustota tekutiny, η dynamická viskozita (10^{-3} Nsm^{-2} pro vodu). Dosadíme-li hodnoty žraloka, dostaneme $Re = 1{,}5.10^6$. Turbulence začínají vznikat pro hodnoty $Re \approx 5.10^5$. Odporovou sílu tedy můžeme popsat vztahem (*)

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu práce, kterou musí žralok vykonat při pohybu vodou. Určíme ji ze vztahu $W = F.s = F.v.t$, pro konstantní rychlost. Nyní dosaďme z (*) a dostaneme

$$W = \tfrac{1}{2} CS\rho v^3 t \ .$$

Předpokládejme, že žraločí hodnota C je nejmenší, tj. 0,05, což odpovídá dokonalé stavbě těla žraloka. Dále určíme plochu $S = \pi r^2 = 0{,}2$ m^2 a t = 24 h, protože nás zajímá energie spotřebovaná během jednoho dne. Za ρ dosadíme hustotu mořské vody, která je přibližně 1 300 kgm^{-3}. Po dosazení obdržíme hodnotu W = 74 kJ. To je energie spotřebovaná za jeden den při překonávání odporu vody.

Jak jsme již uvedli svaly žraloka mají účinnost menší než 1. Bylo vypozorováno, že účinnost je přibližně 25%. To znamená, že organismus žraloka potřebuje denně přijmout 4.74 kJ $\approx$ 300 kJ v potravě, aby byl schopen plavat nepřetržitě 24 hodin. Odhadli jsme tedy, že žralok denně spotřebuje plaváním energii 300kJ.

Otázka ovšem byla, jaké množství ryb musí denně sežrat. Vyjdeme z toho, že látková výměna u žraloka je stejně účinná jako u člověka. Podíváme-li se do kuchařky, najdeme v ní, že 100 g ryby obsahuje asi 230 kJ. Žralok tedy musí denně sežrat 130 g ryby.

Vypadá to, že tento výsledek je absurdní. Nečekali bychom, že žralok vystačí s tak malým množstvím potravy. Srovnáme-li to s člověkem, který denně potřebuje 10 700 kJ, při tomto množství energie by zemřel hlady. Očekávali bychom, že jsme se přepočítali nebo, že jsou špatné některé z našich předpokladů. Ačkoli je to ohromující, vypočítané hodnoty jsou řádově správné.

V literatuře lze najít následující tvrzení: „O žralocích nelze mluvit jako o žravých dravcích. Pěkným příkladem je žralok modrý. Tento žralok o délce dva metry a hmotnosti 50 kg příjme za rok asi 100 kg potravy, což je v přepočtu asi 270 g za den.“

Přístup k úloze jako k Fermimu problému nám v zajímavém kontextu ukázal, jak lze biologická fakta analyzovat pomocí fyzikálních zákonů a získat řádově správné kvantitativní odhady. Shoda vypočtených hodnot se skutečností bude ještě výraznější, jestliže si uvědomíme, že plavání není jedinou činností organismu žraloka, ale že energie je spotřebována také pro jiné fyziologické funkce.