

O jednom starém mýtu v elektromagnetizmu

aneb

Jak NEpočítat solenoidy s feromagnetickým jádrem

Ing. Jan Růžička, Ústí nad Labem

V každé středoškolské učebnici fyziky nebo základů elektrotechniky se dovíme, jak vypočítat intenzitu a indukci magnetického pole uprostřed válcové cívky – solenoidu. Pro „velmi dlouhý“ (nebo spíše „velmi štíhlý“) solenoid bez jádra platí:

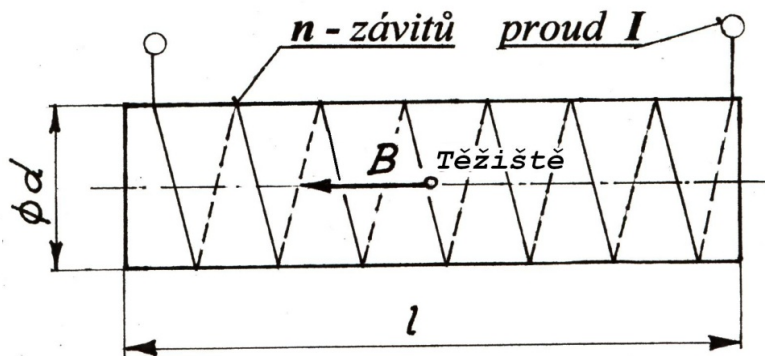
$$H = \frac{n I}{l} \quad (1a) \quad B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{n I}{l} \quad (1b)$$

Jako podmínka použitelnosti se obvykle uvádí (bez bližší kvantifikace) splnění ostré nerovnosti:

$$d \ll l \quad (2)$$

V těchto vztazích ve smyslu obr. 1 značí:

- d [m] – vnitřní průměr vinutí, nebo vnější průměr jádra
- l [m] – délka solenoidu, nebo jeho jádra
- n [/] – celkový počet těsně vinutých závitů jednovrstvého vinutí
- I [A] – ustálený stejnosměrný proud ve vinutí
- H [A/m] – budící intenzita
- B [T] – indukce v těžišti solenoidu
- $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ H/m – permeabilita vakua



Obr. č. 1

Pro případ nesplnění nerovnosti (2) byly odvozeny obecnější vztahy, viz. např. str. 217 v [2]. Vztahy (1) platí i pro toroid (prstencovou cívku) bez jádra, za předpokladu, že délka l je délkou obvodu jeho střednice.

Sledujme dál, jak se změní poměry u těchto dvou základních druhů cívek v případě, že jejich vnitřní prostor vyplníme jádrem z feromagnetického materiálu.

U **toroidu** platí i pro tento případ vztah pro intenzitu dle (1a) a indukci pro tuto hodnotu odečteme přímo z magnetizační křivky materiálu jádra nebo vypočteme ze vztahu:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{n I}{l} \quad (3)$$

kde je:

μ_r [/] – relativní permeabilita jádra

v případě, že známe místo magnetizační křivky, závislost relativní permeability na budící intenzitě. Zde celý magnetický tok teče pouze feromagnetickým jádrem.

Pro “velmi” štíhlý solenoid s feromagnetickým jádrem platí rovněž vztah (3) a příslušný komentář. Na tomto místě je vhodné definovat a kvantifikovat zmiňovaný pojem **štíhlost**. Pro naše úvahy budeme štíhlostí solenoidu rozumět poměr délky a průměru jeho jádra.

$$\text{Štíhlost:} \quad p = l/d \quad (4)$$

Dlouho nezodpovězenou otázkou bylo, jak počítat solenoid s feromagnetickým jádrem s **konečnou, reálnou** štíhlostí.

Zrod mýtu

Řada autorů odborných knih (i vysokoškolských učebnic) se domnívala, že v těchto případech lze s přijatelnou přesností pokračovat v analogii s toroidní cívku. To znamenalo, že postup výpočtu byl opět podle vztahu (3) s tím, že za délku se dosadí přímo délka jádra. Domnívali se, že chyba ve výsledku bude i při běžných štíhlostech (cca $p = 5$) malá, analogicky jako tomu je u solenoidů bez jádra. Znění mýtu bychom mohli zformulovat zhruba takto:

Indukce uprostřed feromagnetického jádra solenoidu závisí především na permeabilitě jeho materiálu a vůbec, nebo v zanedbatelné míře, na jeho štíhlosti.

Přestože se takovýto postup prezentuje v řadě středoškolských i vysokoškolských učebnic (viz. numerické příklady např. v [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]), je třeba ho jednoznačně a kategoricky odmítnout, jako principiálně nesprávný, hrubě zkreslující fyzikální podstatu problému a v praxi **nepoužitelný!**

Rozbor pochybení – důsledky

V čem spočívá zmiňovaná principiální nesprávnost a proč nelze v analogii pokračovat? Je v tom, že na rozdíl od toroidu, kde celý magnetický tok teče pouze feromagnetickým jádrem, u solenoidu nikoliv! Zde indukční line kromě průchodu jádrem, prochází ještě okolním prostředím – vzduchem. Ten klade magnetickému toku značný odpor, který nelze v **reálném** případě zanedbat a do výpočtu nezahrnout. Jedná se o podobný prohřešek, jako kdybychom při výpočtu toroidu s „úzkou“ mezerou, tuto zanedbali.

Důsledky na přesnost výpočtu (pokud se ještě o nějaké dá hovořit), jsou fatální. Odchylky takto vypočtených hodnot indukce od reálných (naměřených) jsou obrovské. Např. u solenoidu

s $p = 5$ s jádrem z měkké uhlíkaté oceli činí cca **jeden řád!** Vypočítaná hodnota indukce je tak cca 10x větší než naměřená! Do přímo obludných rozměrů vzroste nesoulad výpočtu s realitou, pokud tuto indukci použijeme pro výpočet mechanické síly, např. nosnosti tyčového magnetu. Protože zde indukce vystupuje v druhé mocnině, získáme takto sílu, která je ve výše uvedeném případě cca **100x** větší než skutečná (viz. př. 4.6.2 v [7] a [9]). I když se tento chybný postup ještě v současnosti prezentuje v odborných středoškolských učebnicích základů elektrotechniky (viz. [7], [8]) je zjevné a experimentálně doložitelné, že takto „počítat“ nelze. Kromě výše uvedených přímých dopadů na výpočet indukce, má tento nesprávný postup ještě následný dopad i na výpočet další velmi důležité veličiny – vlastní indukčnosti tohoto případu. I při těchto výpočtech se v učebnicích [7] a [9] používá tento nesprávný postup .

Jak počítat správně ?

Především si je nutno uvědomit, že budící intenzita dle (1a) se zde neuplatňuje v plné hodnotě, ale zmenšená o tzv. demagnetizační intenzitu H_d , která zahrnuje magnetický odpor okolního prostoru. Tak se získá nová výsledná intenzita, nazývaná **vnitřní** (interní) označovaná jako H_i . Pro tuto intenzitu v jádru potom platí :

$$H_i = H - H_d \quad (5)$$

Pro tuto intenzitu lze z magnetizační křivky jádra odečíst příslušnou indukci B . Veličina H_d je funkcí permeability a štíhlosti jádra. Další podrobný postup výpočtu včetně numerických příkladů nalezne zájemce v [1]. Zejména zde uvedený grafický způsob je velmi názorný a mohou ho proto snadno zvládnout i středoškolská studenti. Článek je k dispozici i v elektronické formě na webu časopisu Elektro, v čísle 5 ročníku 2006. Adresa : www.eel.cz..

Historické souvislosti – závěry

Historie tohoto mýtu je dlouhá a pozoruhodná. Je známo, že problematikou interakce vnějšího magnetického pole a vybuzeného pole ve feromagnetiku se zabýval již Maxwell ve svém slavném pojednání [12]. Analyticky vyřešil případ rotačního elipsoidu v homogenním magnetickém poli. Odvodil vztah pro demagnetizační faktor, veličiny nezbytné pro výpočet H_d . Pro průmyslové aplikace však bylo potřebnější znát demagnetizační faktor pro válcový tvar jádra. Analytické řešení nebylo možné a proto se ho mnoho badatelů pokoušelo stanovit na základě měření na vzorcích v laboratoři. První použitelné výsledky v tabelární a grafické formě byly publikovány ve dvacátých letech minulého století (viz.[11] str.47) a poslední, zhruba v jeho polovině. Velmi dobře je tato problematika souhrnně popsána v [10]. Proto je těžko pochopitelné, proč v době vydání výše kritizovaných učebnic, kdy podklady pro správný výpočet již byly k dispozici, došlo k tak velké jejich dezinterpretaci.

Nabízí se otázka **zda**, případně **kdy** lze **reálný** solenoid s feromagnetickým jádrem počítat kritizovaným způsobem, nebo co je vlastně „velmi dlouhý“ (nebo velmi štíhlý) solenoid?

Přesná odpověď není snadná a přesahuje rámec tohoto článku. Orientačně však lze říci, že při obvyklých budících intenzitách (cca $H < 10\,000$), jádru z měkké uhlíkaté oceli a přípustné chyby hodnoty B uprostřed jádra pod 10%, musí být jeho štíhlost $p > 500$! V tom případě se nám však charakter jádra mění z tyče na drát. Takové „cívky“ se nepoužívají.

U malých štíhlostí je vliv permeability na výsledek zanedbatelný a určuje ho kromě budící intenzity H , pouze geometrie případu tj. štíhlost p . Docházíme tak k obdobnému závěru, jako u toroidu s mezerou, kde výsledek obvykle určuje převážně velikost mezery.

Jak skoncovat s mýtem ?

Ke skoncování s mýtem je především nutné ho **přestat** šířit v tištěné podobě v učebnicích, i v mluvené, při výuce na školách.

- V nových učebnicích je třeba především zdůrazňovat, že solenoid s feromagnetickým jádrem představuje **zcela** (totálně), otevřený magnetický obvod a jako s takovým je nutno ve výpočtech zacházet.
- Zdůraznit zejména, dominantní vliv štíhlosti na výsledky.
- Z učebnic neprodleně odstranit všechny numerické příklady a úlohy, jejichž výsledky jsou v diametrálním rozporu s výsledky měření a jsou ve své podstatě zavádějící. Pouze tak lze zabránit případné deziluzi zvědavějších studentů, kteří takovou cívku proměří a zjistí hrubý (i **řádrový**) nesoulad s výpočtem dle učebnice.

Literatura :

- | | |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------|
| [1] RŮŽIČKA : Umíme správně spočítat solenoid s jádrem ? | ELEKTRO 5/2006 |
| [2] SEDLÁK – ŠTOLL : Elektřina a magnetismus | ACADEMIA 2002 |
| [3] FUKA – HAVELKA : Elektřina a magnetismus | SNP 1965 |
| [4] FETTER : Přehled silnoproudé elektrotechniky | SNTL 1957 |
| [5] MELUZÍN : Příklady a úlohy z elektrotechniky | ALFA 1974 |
| [6] HAJACH A KOL: Základy elektrotechniky I. | SNTL 1985 |
| [7] BLAHOVEC : Elektrotechnika III., | INFORMATORIUM 2005 |
| [8] BLAHOVEC : Elektrotechnika I., | INFORMATORIUM 2005 |
| [9] BLAHOVEC : Základy elektrotechniky v příkladech a úlohách, | SNTL 1989 |
| [10] REINBOTH : Vlastnosti a použití magnetických materiálů | SNTL 1975 |
| [11] BROŽ : Základy magnetických měření | Nakladatelství ČSAV 1953 |
| [12] MAXWELL : A Treatise on Electricity and Magnetism, | Oxford Press 1873 |